PROBLEMAS FENOMENOLOGIA 2011

1. Una particula de masa m y carga q se mueve en un campo electromagnetico externo fijo descripto por el potencial $(\phi, \vec{A})$. Demuestre que el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \, (\dot{\vec{x}})^2 - q\,\phi + q\,\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$$

da la ecuacion de movimiento no relativista

$$m\,\ddot{\vec{x}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B})$$

y el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

donde $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}$

2. Demuestre que para una particula la accion $S = \int \mathcal{L}\, dt$ es invariante Lorentz si $\gamma\,\mathcal{L}$ es invariante Lorentz. Verifique que esta condicion es satisfecha por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{\gamma} - q\,A^\mu \left(\frac{dx_\mu}{dt}\right)$$

(Esto provee la version relativista del Problema anterior).

3. Demuestre que $i\,\bar{\psi}\,\gamma^5\,\psi$ es un campo pseudoescalar y que $\bar{\psi}\,\gamma^5\,\gamma^\mu\,\psi = -\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\gamma^5\,\psi$ es un campo vectorial axial.

4. Considere un impulso $\vec{p}$ en la direccion especificada por las coordenadas polares θ y ϕ. Obtenga $\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}$ y obtenga los autoestados de helicidad a menos de una fase total.

5. Demuestre que la operacion de conjugacion de carga actuando en las soluciones de energia positiva genera las soluciones de energia negativa.

6. Demuestre que, considerando los campos como anticonmutantes, la densidad Lagrangiana del neutrino

$$\mathcal{L} = i\,\psi_L^\dagger\,\tilde{\sigma}^\mu\,\partial_\mu\psi_L$$

es invariante bajo las operaciones combinadas de paridad y conjugacion de carga.

7. Demuestre que $i\,\sigma^2\,\psi_R^*$ se trasforma como un espinor izquierdo bajo una transformacion de Lorentz.

8. Demuestre que la simetr1a global $U(1)$: $\Phi \rightarrow e^{i\,\alpha}\,\Phi$, de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -[(i\partial_\mu + qA_\mu\,\Phi^*][(i\partial^\mu + qA^\mu\,\Phi] - m^2\,\Phi^*\Phi$$

conduce a una densidad de corriente conservada

$$q\,j^\mu = iq[\Phi^*(\partial^\mu\Phi) - (\partial^\mu\Phi^*)\Phi] - 2q^2A^\mu\Phi^*\Phi$$

9. Utilizando las transformaciones de paridad

$$\phi^P(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$$

$$\vec{A}^P(\vec{r}) = -\vec{A}(\vec{r})$$

$$\psi_L^P(\vec{r}) = \exp i\alpha\,\psi_R(\vec{r})$$

$$\psi_R^P(\vec{r}) = \exp i\alpha\,\psi_L(\vec{r})$$

demuestre que la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[\gamma^\mu\,(1\partial_\mu - q\,A_\mu) - m] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

es invariante bajo inversion espacial.

10. Utilice la conservacion de impulso y energia para demostrar que la creacion de pares por un unico foton, $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$, es imposible en el espacio libre.

11. En el decaimiento de π^- en reposo ($\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$), demuestre que

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v_e}{c}\right) = \frac{m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2}$$

12. Demuestre que la densidad de estados finales para el decaimiento del problema anterior es

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\,\pi\, p_e^2\, \frac{dp_e}{dE}$$

donde V es el volumen de normalizacion y

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{E_e}{m_\pi}$$

13. Obtenga la razon de las razones de decaimiento

$$\frac{\tau(\pi \to \mu\,\bar{\nu}_\mu)}{\tau(\pi \to e\,\bar{\nu}_e)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.28 \times 10^{-4}$$

14. Estime G_F a partir de la expresion (ver Donoghue et al. "Dynamics of the Standard Model", p.138 para su obtencion)

$$\tau^{-1}(\mu \to e\,\bar{\nu}_e\,\nu_\mu) = \frac{m_\mu^5\, G_F^2}{192\,\pi^3}$$

y la vida media experimental τ_μ.

15. Utilizando una apropiada expresion para la invariancia de Lorentz obtenga la ecuacion

$$s = m_e\,(2E_\nu + m_e)$$

para la energia de la colision de un neutrino por un electron en reposo.

16. Seleccione el termino en la densidad lagrangiana efectiva

$$\mathcal{L}_{lepton} = -2\,\sqrt{2}\,G_F\,g_{\mu\nu}\,j^\mu\,j^{\nu\dagger}$$

donde j^μ es la corriente debil leptonica cargada, que contribuye la dispersion $e^- + \nu_e \to e^- + \nu_e$; y el termino en

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,G_F\,j_{\mu\,neutra}\,j^\nu_{neutra}$$

que contribuye a la dispersion $e^- + \nu_\mu \to e^- + \nu_\mu$.

17. El K^- es como el π^-, pero con un quark s reemplazando al d. Una interaccion efectiva con leptones es de la forma

$$\mathcal{L}_{int} = \alpha_K \left[j^\mu \partial_\mu \Phi_K + j^{\mu\dagger} \partial_\mu \Phi_K^\dagger \right]$$

Utilice el analogo de la ecuacion

$$\frac{\tau(\pi \to \mu\,\bar{\nu}_\mu)}{\tau(\pi \to e\,\bar{\nu}_e)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.28 \times 10^{-4}$$

para estimar la razon

$$\frac{\tau(K \to \mu\,\bar{\nu}_\mu)}{\tau(K \to e\,\bar{\nu}_e)}$$

y comparela con el valor observado $2.44 \pm 0.1 \times 10^{-5}$ ($m_K = 493.68\,MeV$). La vida media $\tau(K^- \to \mu^-\,\bar{\nu}_\mu)$ medida es $1.948 \times 10^{-8}, s$, estime α_K/α_π

18. Obtenga la razon del decaimiento

$$\frac{1}{\tau(\tau \to \pi\,\nu_\tau)} = \frac{\alpha_\pi^2}{32\,\pi}\, m_\tau^3 \left[1 - (m_\pi/m_\tau)^2\right]^2$$

19. Demuestre que el boson de Higgs puede decaer a dos fotones en el tercer orden de la teoria de perturbaciones. Dibuje el diagrama de Feynman apropiado.

20. Demuestre que, de acuerdo con la estructura matematica de la teoria de gauge, si dos campos van a ponerse juntos en un doblete de $SU(2)$ sus cargas electricas deben diferir en e.

21. Demuestre que la razon del ancho parcial leptonico de la particula de Higgs a su masa es aproximadamente

$$\frac{1}{16\,\pi}\left(\frac{m_\tau}{v}\right) \approx 2 \times 10^{-6}$$

22. Del termino de interaccion del boson Z con un par electron-positron, demuestre que en colisiones frontales no polarizadas, la probabilidad de que el espin del boson Z este alineado con el haz de electron es proporcional a $(2\,\sin^2(\theta_W))^2$, y de que este anti-alineado es $(\cos(2\,\theta_W))^2$.

23. Despreciando las masas de los leptones, obtenga las amplitudes parciales.

$$\Gamma(W^+ \to e^+\,\nu) = \frac{G_F\,M_W^3}{6\,\pi\,\sqrt{2}} = 226 \pm 1\,MeV$$

$$\Gamma(Z \to e^+\,e^-) = \frac{G_F\,M_Z^3}{12\,\pi\,\sqrt{2}}\,[(1 - 2\,\sin^2\theta_W)^2 + 4\,\sin^4\theta_W] = ?$$

$$\Gamma(Z \to \nu_i\,\bar{\nu}_i) = \frac{G_F\,M_Z^3}{12\,\pi\,\sqrt{2}} = 165.9\,MeV \quad ; \quad i = e, \mu, \tau$$

24. Obtenga $\mathcal{L}_{qZ}$ correspondiente a la interaccion entre quarks y el boson debil neutro.

25. Escriba la densidad Lagrangiana de interaccion entre los campos de quarks y el campo de Higgs. Estime la constante de acoplamiento entre el campo de Higgs y el quark top.

26. No hay corrientes neutras que cambien sabor, es decir, no hay terminos en la corriente neutra que involucren un cambio de sabor de quark. Dibuje diagramas de Feynman de ordenes superiores en teoria de perturbaciones que simulen los decaimientos de corrientes neutras que cambian sabor: $b \to s + \gamma$ y $b \to s + e^+ + e^-$.

27. Obtenga las razones de decaimiento ($k = 1, 2, 3$ indica generacion)

$$\Gamma(d_k\,\bar{d}_k) = \frac{G_F\,M_Z^3}{4\,\pi\,\sqrt{2}}\left[1 - \frac{4}{3}\,\sin^2\theta_W + \frac{8}{9}\,\sin^4 theta_W\right] = 0.3677\,GeV$$

$$\Gamma(u_k\,\bar{u}_k) = \frac{G_F\,M_Z^3}{12\,\pi\,\sqrt{2}}\left[1 - \frac{8}{3}\,\sin^2\theta_W + \frac{32}{9}\,\sin^4 theta_W\right] = 0.2853\,GeV$$

$$\Gamma(W^+ \to u_i\bar{d}_j) = \frac{G_F\,M_Z^3}{2\,\pi\,\sqrt{2}}|Vij|^2$$

Observe que las masas de los quarks fueron despreciadas en estas expresiones.

28. Demuestre que

$$G^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) - g\,f_{abc}\,G^b_\mu\,G^c_\nu$$

29. Verifique la expresion para la corriente

$$j^{a\nu} = g\,[f_{abc}\,G^b_\mu\,G^{c\mu\nu} + \sum_f \bar{q}_f\,\gamma^\nu\,\frac{\lambda_a}{2}\,q_f]$$

30. Dibuje diagramas de modelo de quarks para los decaimientos $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ y $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Demuestre que las amplitudes de decaimiento son proporcionales a V_{ud} y a V_{us} respectivamente y que $V_{us}/V_{ud} = \tan\theta 12$. Despreciando los efectos de las diferentes masas de quarks, la razon calculada en el Problema 17. igualaria V_{us}/V_{ud}. Utilice esta observacion para estimar $\sin\theta_{12}$.

31. Mediante el calculo en la aproximacion de Born del proceso

$$\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \rightarrow W^+ + W^-$$

muestre que el modelo del boson intermediario viola el limite de unitariedad.

32. La teoria de Ginzburg-Landau para la superconductividad permite comprender fenomenologicamente el efecto Meissner. Ginzburg y Landau introducen un parametro de orden ϕ, tal que $|\phi|^2$ esta relacionado con la densidad de electrones superconductores.
a) En ausencia de campo magnetico, la densidad de energia libre del superconductor se escribe:

$$G_S(0) = G_N(0) + \alpha\, |\phi|^2 + \beta\, |\phi|^4$$

donde la constante α es proporcional a $(T - T_c)/T_c$ (siendo T_c la temperatura critica) y $\beta \rightarrow 0$.
Minimice G_S con respecto al parametro de orden y discuta bajo que circunstancias existe ruptura espontanea de simetria. Calcule $< |\phi|^2 >_0$ valor en el cual G_S es minima.
b) En presencia de un campo magnetico externo, la expresion para la densidad de energia libre es

$$G_S(B) = G_S(0) + \frac{B^2}{2} + \frac{1}{2\, m^*}\, |(-i\, \vec{\nabla} - e^*\, \vec{A})\, \phi|^2$$

(La carga efectiva e^* resulta ser $2\, e$, ya que ϕ representa la densidad de pares de Cooper).
Obtenga las ecuaciones de campo que se obtienen minimizando la energia libre con respecto a ϕ y $\vec{A}$. Muestre que en la aproximacion de campo debil $\vec{\nabla}\phi \simeq 0\, ;\ \phi \simeq < \phi >_0)$, el foton adquiere masa dentro del superconductor.
c) Obtenga la ecuacion de movimiento del campo fotonico $\vec{A}$ en el modelo de Higgs abeliano y muestre que constituye una generalizacion relativista del

modelo de Ginzburg-Landau. (Referencia: P.G. De Gennes, "Superconductivity of metals and alloys", Benjamin (1966)).

33. a) Calcule la contribucion electromagnetica a las secciones eficaces diferencial y total para la reaccion $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$. Trabaje en el sistema de centro de masa y en el limite de altas energias, ignorando la masa de los leptones. Suponga que los haces incidentes no estan polarizados y sume sobre espines de los muones producidos.
b) Recalcule la seccion eficaz diferencial para esa reaccion suponiendo los haces polarizados en direccion transversal.

34. a) Calcule la seccion eficaz diferencial para la aniquilacion $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$ considerando las contribuciones de γ y de Z^0 en el canal s.
b) Calcule el parametro de asimetria:

$$A \equiv \frac{\int_0^1 \frac{d\sigma}{dz}\, dz - \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{dz}\, dz}{\int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{dz}\, dz}$$

en el limite $s/M_Z^2 \to 0$.

35. Calcule el cociente

$$R = \frac{\sigma(\nu_\mu\, e \to \nu_\mu\, e)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu\, e \to \bar{\nu}_\mu\, e)}$$

despreciando la masa del electron y el efecto del propagador de Z^0.

36. Calcule las secciones eficaces parcial y total para la dispersion elastica $\nu_e\, e$ en el modelo de Salam-Weinberg. Trabaje en el limite de m_W y m_Z grandes, ignore la masa del electron ($s/m_{W,Z}^2 \to 0$) y utilice el teorema de reordenamiento de Fierz para reescribir el termino proveniente del intercambio de W. Muestre que la amplitud resulta asi identica a la dispersion $\nu_\mu\, e$, con el reemplazo $L_e \to L_\mu$ (Referencia: Berestetskli, Lifshitz y Pitaevski, "Relativistic Quantum Theory" Part I, Secciones 22-28).

37. Calcule la probabilidad de desintegracion para el proceso $H \to f\,\bar{f}$ predicha por el modelo estandar. Calcule a continuacion la seccion eficaz para la reaccion $e^+ e^- \to H \to f\,\bar{f}$ y muestre asi que la seccion eficaz para $e^+ e^- \to H \to todo$ puede escribirse:

$$\sigma(e^+ e^- \to H \to todo) = \frac{4\,\pi\sigma(H \to e^+ e^-)\,\sigma(H \to todo)}{(s - m_H^2)^2 + m_H^2\,\sigma(H \to todo)}$$

siempre que $m_H < 2\, m_W$.
Muestre que aun su valor pico ($\sigma/s = m_H^2$)) resulta muy bajo inclusive para Higgs livianos debido al acoplamiento muy pequeño Higgs-electron.

38. Muestre que para un boson de Higgs pesado, las probabilidades de desintegracion en un par de bosones vectoriales intermedios estan dadas por:

$$\Gamma(H \to W^+\, W^-) = m_H\, \frac{G_F\, m_W^2}{8\,\pi\sqrt{2}}\, \frac{(1-x)^{1/2}}{x}\, (3\, x^2 - 4\, x + 4)$$

$$\Gamma(H \to Z^0\, Z^0) = m_H\, \frac{G_F\, m_Z^2}{16\,\pi\sqrt{2}}\, \frac{(1-x')^{1/2}}{x'}\, (3\, x'^2 - 4\, x' + 4)$$

con

$$x = \frac{4\, m_W^2}{m_H^2} \quad ; \quad x' = \frac{4\, m_Z^2}{m_H^2} = \frac{x}{\cos^2\theta_W}$$

39. Calcule la distribucion angular $d\Gamma/d\Omega$ para la desintegracion $Z^0 \to e^+\, e^-$.

40. La propiedad de conservar el sabor, caracteristica de la corriente neutra, puede generalizarse facilmente al caso de varias generaciones de quarks. Supongamos que existen n dobletes de quarks de quiralidad izquierda. Si incluimos todos los quarks en un espinor compuesto de $2n$ componentes y expresamos la corriente cargada como

$$J_+^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \bar{\psi}\, \gamma^\lambda\, (1 - \gamma_5)\, R\, \psi$$

donde la matriz R de $2n \times 2n$ tiene la forma

$$R = \begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y U es una matriz unitaria de $n \times n$
a) Muestre que, teniendo en cuenta la propiedad

$$[R, R^\dagger] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

la corriente resultara diagonal en sabores.
b) Muestre que U puede parametrizarse en terminos de $n(n-1)/2$ angulos de mezcla y $(n-1)(n-2)/2$ fases complejas, despues de tener en cuenta la libertad para redefinir fases de los campos de quarks.

c) Para el caso de tres dobletes ($n = 3$), muestre que U puede escribirse:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp i\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

con $s_i = \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$.
Discuta las consecuencias de la fase δ con respecto a la invariancia CP. (Referencia: M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) 49 652 (1973)).

41. Calcule la seccion eficaz diferencial para la dispersion $e(\mu)\,p \to e(\mu)\,X$ inelastica profunda (inclusiva), con haz incidente y blanco de polarizacion arbitraria.

42. a) Ignorando el contenido de antiquarks en el nucleon, calcule el cociente de las secciones eficaces inelasticas profundas via corriente neutra y cargada:

$$R_\nu = \frac{\sigma(\nu\, N \to \nu\, X)}{\sigma(\nu\, N \to \mu^-\, X)}$$

b) Repita el calculo para

$$R_{\bar\nu} = \frac{\sigma(\bar\nu\, N \to \bar\nu\, X)}{\sigma(\bar\nu\, N \to \mu^+\, X)}$$

43. Explique como pueden ser usados los resultados concernientes a la dispersion $e^+\, e^- \to \mu^+\, \mu^-$ con haces polarizados obtenidos en el problema 3.b) conjuntamente con los correspondientes a $e^+\, e^- \to$ *hadrones* (igualmente polarizados), para verificar el modelo de partones e introducir el concepto de jets. (Referencia: G.J. Hanson et al, Phys. Rev. Lett. 35 1609 (1975); R. Schwiters et al, ibid., 35, 1320 (1975)).

44. a) Muestre que para cualquier teoria de gauge, la anomalia axial representada por el diagrama triangular con vertices γ_μ, γ_ν, A_λ es proporcional a

$$A^{abc} = A^{abc}_R - A^{abc}_L$$

donde

$$A^{abc}_{R,L} = Tr\left(\{T^a_{R,L}, T^b_{R,L}\}, (\{T^c_{R,L}\}\right)$$

no depende de las masas fermionicas y $T^a_{R,L}$ son generadores de la representacion adecuada del grupo de gauge.
b) Utilizando la relacion de Gell-Mann-Nishijima muestre que la condicion necesaria para garantizar la ausencia de anomalia en el modelo de Salam-Weinberg es:

$$Tr(Q) = \sum_{fermiones} Q = 0$$

45. Calcule

$$\frac{d\sigma}{dz}(e^+ \, e^- \to q \, \bar{q})$$

donde q es un quark. Calcule el cociente:

$$R = \frac{\sigma(e^+ \, e^- \to f \, \bar{f})}{\sigma(e^+ \, e^- \to \mu^+ \, \mu^-)}$$

para distintas especies fermionicas en el pico del boson Z^0. Calcule el parametro de asimetria de cada caso.

46. a) Discuta las correcciones introducidas a $\sigma_{QED}(e^+ \, e^- \to hadrones)$ por QCD perturbativa (a orden α_s) ignorando las masas de los quarks. (Referencia: T. Appelquist and H. Georgi, Phys. Rev. D8, 4000 (1973)).
b) Considere las correcciones, al mismo orden de QCD, debidas a la consideracion de un quark masivo (como el charm c o el b). (Referencia: T. Appelquist and H. Politzer, Phys. Rev. D12, 1404 (1975)).

47. Bajo transformaciones de gauge locales, los campos en diferentes puntos se transforman en forma diferente.

$$\psi(x) \to U(x) \, \psi(x) \quad ; \quad \psi(y) \to U(y) \, \psi(y)$$

con $U(x) \neq U(y)$. Asi la derivada usual, siendo proporcional a la diferencia de campos en diferentes puntos

$$\partial\psi(x) \propto [\psi(x + dx) - \psi(x)]$$

no tiene una propiedad de transformacion simple porque $U(x + dx) \neq U(x)$. Supongamos que introducimos los campos de gauge A_μ de manera tal que podemos definir

$$\tilde{\psi}(x + dx) = \psi(x + dx) + A_\mu \, \psi(x) \, dx^\mu$$

de manera que $\tilde{\psi}(x+dx)$ se transforma del mismo modo que $\psi(x)$, es decir

$$\tilde{\psi}(x+dx) \rightarrow U(x)\,\tilde{\psi}(x+dx)$$

a) Muestre que si se define a la derivada covariante como

$$\tilde{\psi}(x+dx) - \psi(x) \equiv D_\mu \psi(x)\, dx^\mu$$

entonces

$$D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu + A_\mu)\, \psi(x)$$

b) Demuestre que el campo de gauge tiene la siguiente propiedad de transformacion

$$A'_\mu = U\, A_\mu\, U^\dagger - (\partial_\mu U)\, U^\dagger$$

48. La funcional generatriz de campo libre en el gauge covariante generalizado (R_ξ) esta dada por

$$W_A[J] = \int [dA_\mu]\, \exp\left\{ i \int d^4x\, \left[\frac{1}{2}\, A^a_\mu\, K^{\mu\nu}_{ab}(x)\, A^b_\nu + J^a_\mu\, A^{\mu a} \right] \right\}$$

con

$$K^{\mu\nu}_{ab}(x) = \delta ab \left[g^{\mu\nu}\, \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right]$$

ξ es una constante arbitraria. Si definimos la funcion de Green por

$$\int d^4y\, K^{\mu\nu}_{ab}(x-y)\, G^{bc}_{\nu\lambda}(y-z) = g^\mu_\lambda\, \delta^c_a\, \delta^4(x-z)$$

donde $K^{\mu\nu}_{ab}(x-y) = \delta^4(x-y)\, K^{\mu\nu}_{ab}(x)$

Demuestre que

$$G^{ab}_{\mu\nu}(x-y) = \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)} \left[-\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu\, k^\nu}{k^2} \right) - \xi\, \frac{k^\mu\, k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2}$$

es el propagador para el campo de gauge.

49. Para un campo vectorial masivo V_μ el Lagrangiano libre esta dado por

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}\, V_{\mu\nu}\, V^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2}\, V_\mu\, V^\mu$$

con $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$

Demuestre que el propagador para este campo esta dado por

$$i\,\triangle_{\mu\nu}(k) = -i\,\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu\, k\nu/M^2}{k^2 - M^2 + i\,\epsilon}$$

50. La condicion de gauge axial esta dada por $n^\mu\, A^a_\mu = 0$ donde n^μ con $n^2 < 0$ es un vector tipo espacio. Demuestre que es este gauge el propagador del boson de gauge en el espacio de los impulsos es de la forma

$$\triangle^{\mu\nu}_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{k^2}\left[-g^{\mu\nu} + \frac{1}{k\cdot n}\,(n^\mu\, k^\nu + k^\mu\, n^\nu) + \frac{(\alpha\, k^2 - n^2)}{(n\cdot k)^2}\, k^\mu\, k^\nu\right]$$

donde α es un parametro arbitrario en el termino de fijado de gauge.

51. Calcular el propagador del boson de gauge en el gauge de Coulomb $\vec{\partial}\cdot\vec{A} = 0$, donde hemos ignorado el indice de simetria interna. Para resolver este problema aconsejamos reescribir esta condicion de gauge como

$$\partial^\mu A_\mu - c_\mu \partial^\mu (c_\nu A_\nu) = 0 \quad where\;\; c_\mu = (1,0,0,0)$$

52. En una teoria de gauge no Abeliana con fermiones el Lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\, i\,\gamma^{mu}\, D_\mu\, \psi - m\,\bar{\psi}\,\psi$$

con

$$D_\mu\,\psi = (\partial_\mu - i\,g\,t^a\, A^a_\mu)\,\psi$$

Demuestre que al menor orden en el acoplamiento de gauge g, la amplitud de dispersion fermionica $(\psi^a + \psi^b \rightarrow \psi^c + \psi^d)$ es la misma en los gauges covariante, axial y de Coulomb.

53. El espinor de Dirac en el espacio de los impulsos puede escribirse como

$$u(p,\pm) = \sqrt{2\,m}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix}$$

donde $(\vec{\sigma}\cdot\check{p})\,\chi_\pm = \pm\chi_\pm$ con $\check{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$. Demuestre que los espinores derechos e izquierdos dados por

$$u_R(p) = \frac{1}{2}\,(1+\gamma 5)\,u(p,+) \quad ; \quad u_L(p) = \frac{1}{2}\,(1-\gamma 5)\,u(p,-)$$

son autoestados del operador de helicidad $\lambda = \vec{s} \cdot \check{p}$ en el limite sin masa, donde el operador de espin es de la forma $\vec{s} = 1/2\, diag(\vec{\sigma}, \vec{\sigma})$.
Notese que el mismo calculo deberia tambien mostrar que las otras dos combinaciones $((+,-)$ y $(-,+))$ en las definiciones anteriores son identicamente cero en el mismo limite.

54. Para una particula descripta por un espinor $u(p, \lambda)$, podemos definir los cuatro vectores de polarizacion $s_\mu(p, \lambda)$ como

$$s_\mu(p, \lambda) = \frac{1}{2\, m}\, \bar{u}(p, \lambda)\, \gamma_\mu\, \gamma_5\, u(p, \lambda)$$

(a) Demuestre que $s \cdot p = 0$.
(b) Calcule s_μ para la particula en reposo $(p \vec{=} 0)$, con $\chi + 1 = (1, 0)$ y $\chi_- = (0, 1)$.
(c) Demuestre que $s^2 = -1$.
(d) Suponga que para una particula en reposo el vector de polarizacion esta dado por $s^\mu = (0, \vec{\eta})$ con $\eta^2 = 1$. Demuestre que en el sistema donde la particula se mueve con impulso $\vec{p}$, el vector de espin esta dado por

$$s^0 = \frac{\vec{\eta} \cdot \vec{p}}{m} \quad ; \quad \vec{s} = \vec{\eta} + \frac{\vec{p}\,(\vec{\eta} \cdot \vec{p})}{(E + m)\, m}$$

55. El potencial escalar usual para el modelo estandar es de la forma

$$V(\phi) = -\mu^2\, \phi^\dagger\, \phi + \lambda\, (\phi^\dagger\, \phi)^2$$

con

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

(a) En principio se puede tener un invariante cuartico de la forma

$$V_1(\phi) = \lambda_1\, (\phi^\dagger\, \vec{\tau}\, \phi \cdot (\phi^\dagger\, \vec{\tau}\, \phi)$$

Demuestre que este termino cuartico puede reducirse a al de la expresion inicial $V(\phi)$.
(b) Demuestre que otro termino cuartico como

$$V_2(\phi) = \lambda_2 \sum_{ab} (\phi^\dagger\, \tau^a \tau^b\, \phi\, (\phi^\dagger\, \tau^a \tau^b\, \phi)$$

es tambien reductible a $V(\phi)$.

56. Supongamos que la matriz de masa de fermiones en la base de los campo derechos e izquierdos es hermitica

$$\mathcal{L}_M = \bar{\psi}_{iL}\, M_{ij}\, \psi_{jR} + h.c. \quad ; \quad M^\dagger = M$$

En general, los autovalores de M obtenidos de una transformacion unitaria no siempre son positivos

$$U\, M\, U^\dagger = M_d = diag(m_1, m_2, ..., m_n)$$

donde m_i pueden ser negativos tanto como positivos.
(a) Demuestre que se puede elegir una transformacion biunitaria apropiada para diagonalizar M de modo que todos los elementos diagonales sean no negativos.
(b) Si la matriz de masa es real, demuestre que las matrices en la transformacion biunitaria pueden elegirse siendo matrices ortogonales.

57. Demostrar que si hubiera un grupo de escalares $h^i_\alpha\, (i = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, 3)$ transformandose como un doblete bajo la simetria debil $SU(2)$ y como un triplete bajo color $SU(3)_c$ entonces el numero barionico B y el numero leptonico L no se conservan. Sin embargo, la combinacion lineal $B - L$ se conserva.

58. La interaccion debil de corriente neutra mediada por el boson Z viola la conservacion de paridad en un atomo y generara mezcla entre niveles con paridades opuestas.
(a)Demuestre que la parte de la interaccion que viola paridad tiene la forma

$$\mathcal{L}_N = \frac{g^2}{2\, M_Z^2} \left(A_e^\mu\, V_\mu^q + V_e^\mu\, A_\mu^q \right)$$

donde A_e^μ y V_e^μ son las corrientes vectorial y axial del electron y las con superindice q las corrientes vectorial y axial de los quarks.
(b) Si escribimos $\mathcal{L}_N$ en la forma

$$\mathcal{L}_N = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e\, (C_{1u}\bar{u}\gamma_\mu u + C_{1d}\bar{d}\gamma\mu d) + (\gamma_\mu\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu\ ;\ 1 \leftrightarrow 2) \right]$$

calcule los coeficientes C_{iu} y C_{id}.

59. La asimetria de polarizacion (o la asimetria derecha-izquierda) en el decaimiento del boson Z en un par de fermiones esta dada por

$$A_{LR}(f) = \frac{\Gamma(Z \to f_L, \bar{f}_R) - \Gamma(Z \to f_R, \bar{f}_L)}{\Gamma(Z \to f_L, \bar{f}_R) + \Gamma(Z \to f_L, \bar{f}_R)}$$

y la corriente neutra puede escribirse como

$$J_\mu^Z = \sum_f \left[g_L(f)\,(\bar{f}_L\,\gamma_\mu\,f_L) + g_R(f)\,(\bar{f}_R\,\gamma_\mu\,f_R) \right]$$

En este problema deseamos expresar el parametro de asimetria en terminos de los parametros de la corriente neutra $g_{L,R}(f)$.
(a) Demuestre que el parametro de asimetria puede escribirse como

$$A_{LR}(f) = \frac{(g_L(f))^2 - (g_R(f))^2}{(g_L(f))^2 + (g_R(f))^2}$$

(b) Calcule el parametro de asimetria $A_{LR}(f)$ para los decaimientos (i)$Z \to e\,\bar{e}$; (ii)$Z \to c\,\bar{c}$; (iii)$Z \to b\,\bar{b}$. Para el calculo numerico, utilice $\sin^2\theta_W = 0.22$

60. (a) Demuestre que para el orden mas bajo en QCD y la aproximacion en que todas las masas de fermiones en el estado final son despreciables tenemos los siguientes branching ratios:

$$B(\tau \to e\,\nu\,\bar{\nu}) = B(\tau \to \mu\,\nu\,\bar{\nu}) \simeq 1/5$$

(b) Calcular el decay rate para $\tau \to \pi\,\nu$ en terminos de la constante de decaimiento del pion f_π.

61. (a) Demuestre que la energia umbral para la reaccion $\nu_\mu + e \to \nu_e + \mu$ en el sistema laboratorio es $E = 14\,GeV$.
(b) Demuestre que en la dispersion elastica $\nu_e + e \to \nu_e + e$, el angulo de scattering θ_e del electron con respecto a la direccion del haz de neutrinos satisface

$$\sin^2\theta_e = \frac{2\,m_e}{(T_e + 2\,m_e)} \left[1 - \frac{T_e}{E_\nu} - \frac{m_e\,T_e}{2\,E_\nu^2} \right]$$

donde T_e es la energia cinetica el electron final.

62. Demuestre que en el modelo estandar el decaimiento del boson Z en dos bosones de Higgs esta prohibido por la conservacion del impulso angular y la estadistica de Bose.